Chapitre 5 :
Probabilités sur un ensemble fini

Dénombrement- probabilités élémentaires

Exercice 1 On dispose d'un jeu de 32 cartes et on prend deux cartes, successivement, sans remise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de possibilités a-t-on pour obtenir deux rois ?
3. Combien de possibilités a-t-on d'obtenir deux couleurs différentes (pique, coeur, carreau ou trèfle) ?
4. Combien de possibilités a-t-on d'avoir deux cartes de la même valeur ?

Exercice 2 La combinaison d'un coffre est constituée de 4 chiffres entre 0 et 9.

1. Combien de codes sont possibles ?
2. Combien de codes commençant par 012 ?
3. Combien de codes où tous les chiffres sont différents ?
4. Combien de codes où les chiffres sont par ordre strictement croissant (par exemple 0469 est un des codes possibles) ?

Exercice 3 En France, depuis 2009, les plaques d'immatriculation ont pour format AA-111-AA (deux lettres, 3 chiffres, deux lettres).

1. Combien y a-t-il de plaques possibles ?
2. Combien de plaques sont des palindromes (ie de la forme AB-212-BA) ?
3. Combien de plaques n'ont que des caractères différents ?
4. Combien de plaques ont au moins un caractère qui se répète ?
5. Combien de plaques ont leurs chiffres dans un ordre strictement croissant ?

Exercice 4 On souhaite ranger sur une étagère 3 livres de maths, 6 livres de géopolitique et 4 livres pour la "culture gé". De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. Sans imposer de contrainte d'aucune sorte...
2. Si les livres doivent être groupés par matière.
3. Si au moins les livres de maths doivent être groupés.

Exercice 5 On tire 3 boules avec remise d'une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3. Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on note A_i l'évenement : "la i-ème boule tirée porte le numero 1". Exprimez les événements suivants sous la forme d'unions, d'intersections et de complémentaire des événements A_i.

B : On obtient 3 fois la boule 1
C : On obtient au moins une fois la boule 1
D : On obtient une seule fois la boule 1
E : La boule 1 est obtenue pour la première fois au 2ième tirage
F : La boule 1 est obtenue pour la première fois au troisième tirage
G : La boule 1 est obtenue pour la première fois au 1er tirage ou n'est pas obtenue.

Exercice 6 Les trois mousquetaires (donc 4 personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. Modéliser cette expérience aléatoire, et calculer les probabilités des événements suivants :

— A : les deux bottes sont les siennes.
— B : les deux bottes forment une paire.
— C : les deux bottes sont deux pieds droits.
— D : les deux bottes appartiennent à deux mousquetaires différents.

Exercice 7 (Problème du chevalier de Meré) "Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, on a 1 chance sur 6 d'obtenir un 6. Donc si on lance le dé deux fois de suite, on double nos chances d'obtenir au moins un 6."

Cela semble tout à fait logique. Mais est-ce vrai ?

Exercice 8 Aux échecs, la tour est une pièce qui "voit" les pièces situées dans la même ligne ou dans la même colonne qu'elle. Elle ne voit pas en diagonale.

On pose deux tours au hasard sur un échiquier (c'est à dire un damier de 8x8 cases). Modéliser la situation et calculer la probabilité que les deux tours ne se voient pas.

Exercice 9 On considère un groupe de n personnes dont on regarde la date d'anniversaire. On suppose que personne n'est né un 29 février et que les autres dates sont équiprobables.

1. Modéliser la situation et calculez la probabilité qu'au moins 2 personnes fêtent leur anniversaire le même jour.
2. Ecrire un programme Python intitulé "anniv(n)" qui calcule cette probabilité.
3. Compléter le programme suivant pour qu'il calcule le nombre n a partir duquel cette probabilité dépasse le nombre p :

```
def nombreEleves(p):
    n=2
    while
       n=n+1
```

Probabilités conditionnelles

Exercice 10 A New York, dans le quartier de Little Italy, parmi les 28 cafés du quartier on trouve deux types de cafés : les cafés tenus par un vrai immigré italien (soit 21 cafés), et les autres, tenus par des immigrés anglais qui se font passer pour des Italiens. Si le café est tenu par un vrai immigré italien, il y a 80% de chance que le café soit bon. Si il est tenu par un Anglais déguisé, il n'a que 30% de chance d'être bon. On suppose qu'un café est soit bon, soit imbuvable.

1. Vous vous arrêtez pour boire un café : quelle est la probabilité pour qu'il soit bon ?
2. Le café en question s'appelait "*la piccolina Roma*" et s'est avéré mauvais. Quelle est la probabilité que le tenancier soit un vil Anglais grimé ?

Exercice 11 En cas de migraine, trois patients sur cinq prennent de l'aspirine, deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires. Avec l'aspirine, 75 % des patients sont soulabgés, avec le médicament M, 90%.

1. Quel est le taux global de patients soulagés ?
2. Quelle est la probabilité pour un patient soulagé d'avoir pris de l'aspirine ?

Exercice 12 Ayant subi une opération des yeux, un professeur de mathématiques écrit son premier sujet de DS en sélectionnant au hasard ses exercices dans un de ses trois livres. Il sait que les exercices du livre *Exercices de MPSI* sont difficiles, et que les élèves ont 2 chances sur 3 d'échouer (on suppose que tous les élèves ont la même probabilité de réussite, ce qui est évidemment absurde puisque cela ne prend pas en compte votre travail acharné). Ceux d'*Exercice d'ECG1* conduisent à une probabilité de réussite de 2 sur 3 pour les brilliants élèves de Pergaud. Quand à ceux de *Oui-oui découvre les mathématiques*, les élèves ont une chance de 90% de les réussir.

— Quelle est la probabilité que vous arriviez à faire les exercices du devoir ?
— En rentrant chez elle ce week-end, Donia annonce fièrement à ses parents que le DS s'est bien passé, en fait, c'était facile. Quelle est la probabilité qu'elle ait eu affaire à des exercices d'ECG ?

Exercice 13 (Problème de Monty Hall) Au cours d'un jeu télévisé, un candidat doit choisir entre trois boîtes. Dans une des boîtes se trouvent les clés d'une magnifique voiture, alors que les autres boîtes sont vides.

Les trois boîtes sont identiques aux yeux du candidat qui ne dispose au départ d'aucun indice pour orienter son choix.

Il désigne une des boîtes. Le présentateur du jeu, qui sait où sont les clés, doit alors ouvrir une boîte vide parmi les deux autres. Il laisse alors au candidat la possibilité de revenir sur son premier choix.

Quelle stratégie doit-il adopter pour optimiser ses chances de gagner ?

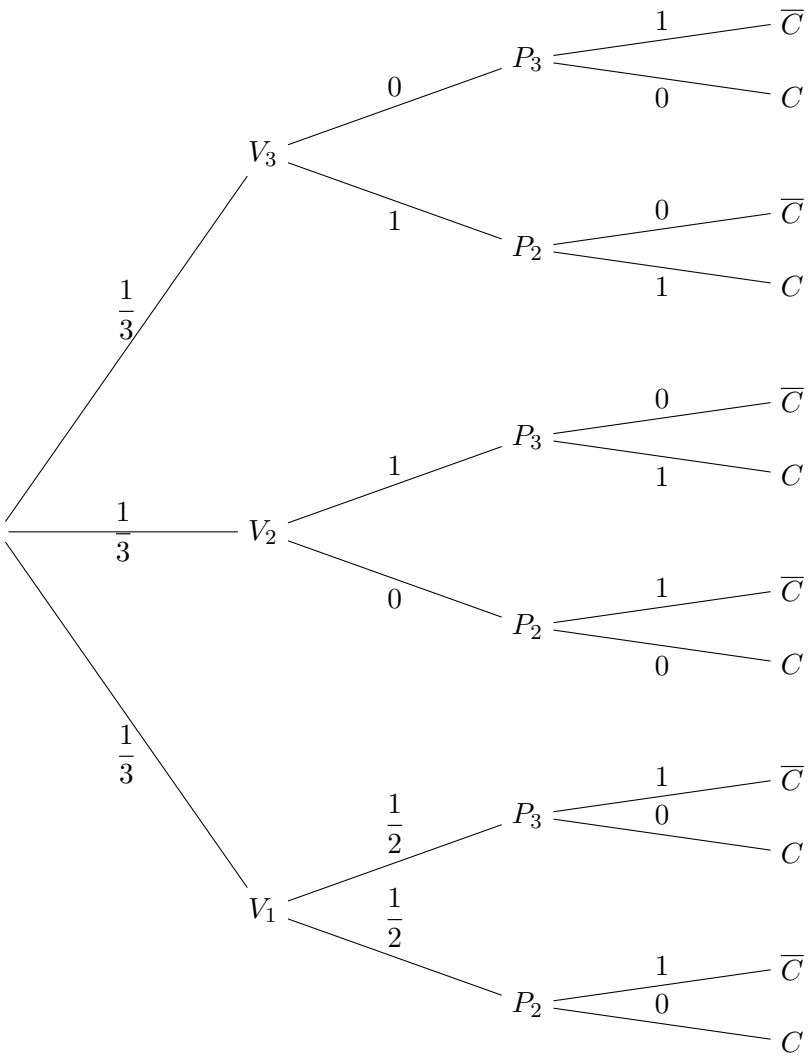
Si l'on suppose que le maître du jeu a ouvert une boîte au hasard, cela change-t-il votre point de vue ?

Correction : Par symétrie, on peut supposer que le candidat choisit la boîte 1. On note V_i l'événement "la voiture est dans la boîte i" et P_j l'événement "le présentateur ouvre la boîte j".

Enfin, on note C l'événement "le candidat gagne en changeant de boîte après l'ouverture d'une boîte vide par le présentateur".

On cherche à déterminer la probabilité de l'événement C.

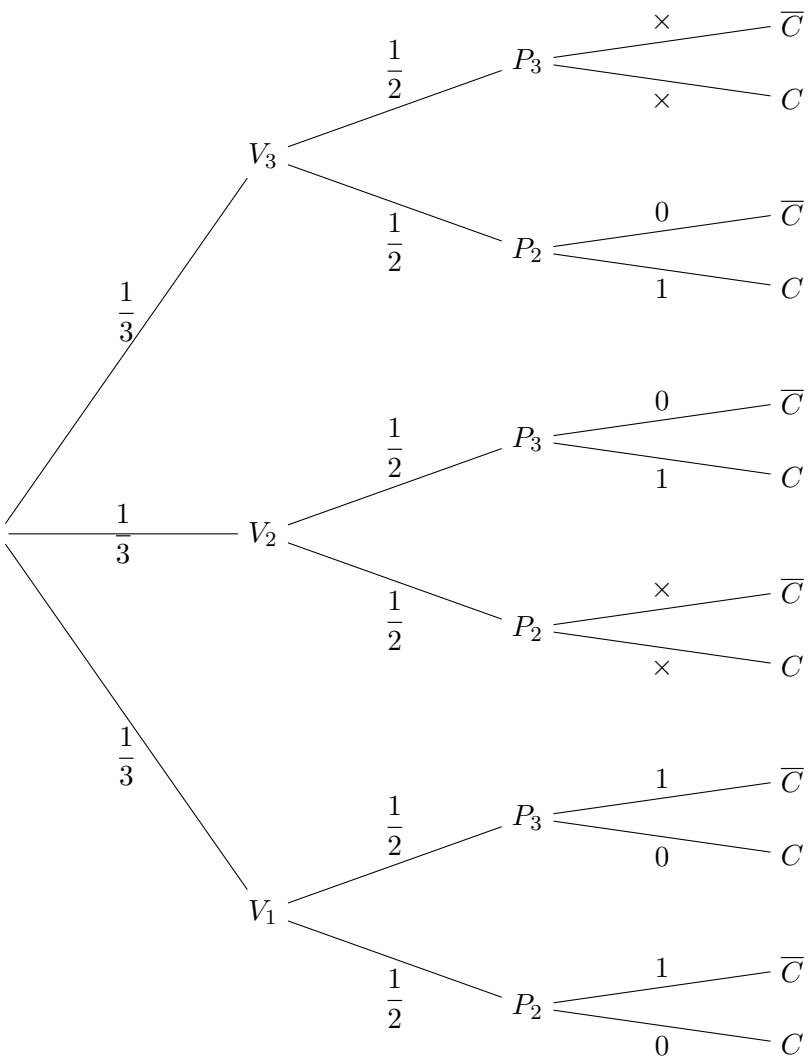
On a l'arbre suivant :



On en déduit que :

$$\boxed{P(C) = P(C \cap V_1) + P(C \cap V_2) + P(C \cap V_3) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.}$$

Si l'on regarde cette fois l'arbre en supposant que le présentateur ouvre une boîte au hasard, on obtient :



On pause V ="le présentateur ouvre une boîte vide au hasard".

On a maintenant $P_V(C) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(V)}$. On peut calculer ces deux probabilités :

— $P(V \cap C) = P(V_2 \cap P_3) + P(V_3 \cap P_2) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

— $P(V) = P(V_1) + P(V_2 \cap P_3) + P(V_3 \cap P_2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

On trouve finalement :

$$\boxed{P_V(C) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}}$$

Il n'y a donc plus d'intérêt à changer de boîte si le présentateur ouvre une boîte au hasard.

Exercice 14 Un fumeur cherche à arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : si un jour il est parvenu à ne pas fumer, il fume le lendemain avec la probabilité 1/2. Si il a fumé un jour, il refumera le lendemain avec la probabilité 1/4. On note p_n la proba qu'il fume le n-ème jour.

Déterminez p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de p_1 et n et déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 15 On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et la pièce B donne face avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$. On choisit une des deux pièces au hasard, et on la lance. Si on obtient face, on conserve la pièce, et si on obtient pile, on change et on prend l'autre pièce. On procède alors à un nouveau lancer, et on répète l'opération.

1. On note A_n l'événenement "on joue avec la pièce A au n ième lancer" et note $p_n = P(A_n)$. Montrez que (p_n) est une suite arithmético-géométrique de paramètres à déterminer, et calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 16 On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On modélise l'événement "les deux cartes ont la même valeur" par A et "les deux cartes ont même couleur" par B (on rappelle que lorsqu'on parle de la "couleur" d'une carte, c'est le symbole qui compte : "coeur" n'est pas de la même couleur que "carreau"). Modéliser l'expérience et étudier l'indépendance des évenements A et B dans les deux cas suivants :

1. On remet la première carte dans le jeu avant de tirer la deuxième.
2. On tire les deux cartes en même temps.

Exercice 17 (Marche aléatoire sur une droite) Soient N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.

Une particule se déplace sur une droite en faisant des sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite. À chaque instant, la probabilité qu'elle aille vers la droite est p et celle qu'elle aille vers la gauche est $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants.

Initialement, la particule est en $n \in [0, N]$, et elle s'arrête dès qu'elle atteint l'une des extrémités de cet intervalle : 0 ou N.

On note a_n la probabilité que la particule s'arrête en 0.

1. Justifier brièvement que $a_0 = 1$ et $a_N = 0$.
2. Montrer que pour tout entier n compris entre 1 et $N-1$, on a :
$$a_n = p\, a_{n+1} + q\, a_{n-1}.$$
3. En déduire l'expression de a_n en fonction de n, N, p et q (on pensera à distinguer les cas $p = \dfrac{1}{2}$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$).
4. De la même façon, déterminer la probabilité b_n que la particule s'arrête en N (en distinguant les mêmes cas).
5. Calculer $a_n + b_n$, et en déduire la probabilité que la particule ne s'arrête jamais.

Correction :

1. Si la particule est en 0, elle s'arrête forcément en 0, donc $a_0 = 1$. Si elle est en N, elle ne peut pas s'arrêter en 0, donc $a_N = 0$.
2. Si la particule est en n avec $1 \leq n \leq N-1$, elle peut aller en $n+1$ avec la probabilité p et dans ce cas la probabilité de s'arrêter en 0 est a_{n+1}, ou elle peut aller en $n-1$ avec la probabilité q et dans ce cas la probabilité de s'arrêter en 0 est a_{n-1}. On pose E_1 l'événement "aller en $n-1$" et E_2 l'événement "aller en $n+1$". Par le principe des probabilités totales avec le SCE (E_1, E_2), on a donc :
$$a_n = P(E_1)P_{E_1}(\text{"finir en 0"}) + P(E_2)P_{E_2}(\text{"finir en 0"})$$
D'où
$$\boxed{a_n = qa_{n-1} + pa_{n+1}}$$
3. La relation précédente s'écrit aussi (au rang $n+1$) :
$$a_{n+2} - \frac{1}{p}a_{n+1} + \frac{q}{p}a_n = 0$$
car $p \neq 0$.
La relation caractéristique associée est $x^2 - \dfrac{1}{p}x + \dfrac{q}{p} = 0$. Le discriminant de cette équation est
$$\Delta = \frac{1-4pq}{p^2} = \frac{(2p-1)^2}{p^2} \geq 0.$$
— Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les racines sont $r_1 = \dfrac{1-p}{p} = \dfrac{q}{p}$ et $r_2 = 1$. La suite (a_n) est donc de la forme $a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda\left(\dfrac{q}{p}\right)^n + \mu$. En utilisant que $a_0 = 1$ et $a_N = 0$, on trouve puis résout le système :
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda\left(\dfrac{q}{p}\right)^N + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda\left(\dfrac{q}{p}\right)^N + 1 - \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \dfrac{-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \\ \lambda = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\boxed{a_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}}$$

— Si $p = \frac{1}{2}$, la racine double est $r = 1$. La suite (a_n) est donc de la forme $a_n = \lambda + \mu n$. En utilisant les conditions aux limites, on trouve le système :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda + \mu N = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -\dfrac{1}{N} \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{a_n = 1 - \frac{n}{N}}$$

4. On peut refaire la même démarche pour b_n. On trouve $b_N = 1$, $b_0 = 0$ et pour $1 \leq n \leq N-1$,

$$b_n = pb_{n+1} + qb_{n-1}.$$

— Si $p \neq \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\boxed{b_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}}$$

— Si $p = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\boxed{b_n = \frac{n}{N}}$$

5. On remarque que dans les deux cas, on a $a_n + b_n = 1$. La particule s'arrête donc toujours.

Exercice 18 On lance un dé plusieurs fois en décidant de s'arrêter au premier 6 obtenu. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "le n-eme lancer a lieu et amène un 6", et B_n "le n-ème lancer a lieu et amène 1,2,3,4 ou 5"

1. Montrez que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants et que $\overline{A_2} \neq B_2$.
2. On suppose que $n \geq 2$. Justifier que $A_n = B_1 \cap B_2 \cap .... \cap B_{n-1} \cap A_n$
3. En déduire $P(A_n)$ en fonction de n et donner $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$.

Exercice 19 On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 5 boules noires et 3 boules blanches alors que l'urne V contient 6 boules noires et 2 boules blanches.
On note U l'événement "les tirages ont lieu dans l'urne U" et V l'événement "les tirages ont lieu dans l'urne V.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose B_k l'événement "Obtenir une boule blanche au k-ème tirage".
On choisit une urne au hasard.

1. On extrait une boule : quelle est la probabilité que cette boule soit noire ?
2. On extrait les boules une par une et sans remise. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose E_n l'événement "la première boule noire est extraite au n ième tirage".
   (a) Justifiez que $E_n = \emptyset$ pour $n > 4$.
   (b) Calculez $P(E_n)$ pour chaque $n \in [\![1, 4]\!]$

Exercice 20

1. Soit E et F deux événements. Montrer que $P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$.
2. (a) En déduire que, si A, B et C sont trois événements, alors on a :

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

   (b) En écrivant l'inégalité précédente pour les événements $\bar{A}, \bar{B}$ et $\bar{C}$, établir que, si trois événements A, B et C sont équiprobables, de même probabilité p, et vérifient $P(A \cap B \cap C) = 0$, alors on a : $p \leq \frac{2}{3}$.

Correction :

1. C'est du cours : $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \leq P(E) + P(F)$.
2. (a) On applique l'inégalité précédente deux fois :

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \leq P(A \cup B) + P(C) \leq P(A) + P(B) + P(C).$$

(b) On applique l'inégalité précédente aux événements $\bar{A}, \bar{B}$ et $\bar{C}$:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B}) + P(\bar{C}).$$

Or, par De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{A \cap B \cap C}$. Donc, par complémentarité,

$$1 - P(A \cap B \cap C) \leq 3(1 - p).$$

Comme $P(A \cap B \cap C) = 0$, on en déduit que $1 \leq 3 - 3p$, soit $p \leq \dfrac{2}{3}$.